BKP方程式系の解のPfaffianによる表示と積分方程式(ソリトン理論における広田の方法)

広田, 良吾

数理解析研究所講究録
684巻 1989年 33-62

ＢＫＰ方程式系の解のpfaffianによる表示と積分方程式

広大 工 広田良吾(Ryogo Hirota)

結論Ｉ. BKP方程式系はBilinear formで表示すると

$$(D_1^6-5D_1^3D_3-5D_3^2+9D_1D_5)\tau\cdot\tau=0,$$

------,

となるが，解τをpfaffianで表示すると，Bilinear formはpfaffianのidentityに等しくなる。このidentityはSatoのMaya diagramにならって

[○|○|○|○] × [| | |]

= [○|○| |] × [| |○|○] − [○| |○|] × [|○| |○]

+ [○| | |○] × [|○|○|]

と表示される。

結論II. ＢＫＰ方程式系の積分方程式は

$$K(x,z)+F(x,z)-\int_{-\infty}^{x}D_y\,K(x,y)\cdot F(y,z)\,dy=0,$$

ここで

$$F(x,z)=-F(z,x),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}K(x,z)\Big|_{z=x}=\frac{\partial}{\partial x}\log\tau,$$

である。この積分方程式はKP方程式系におけるGel'fand-Levitan integral equation

$$K(x,z)+F(x,z)+\int_{-\infty}^{x}K(x,y)F(y,z)\,dy=0,$$

ここで

$$K(x,z)\Big|_{z=x}=\frac{\partial}{\partial x}\log\tau,$$

に相当している。

§I.1　BKP方程式のpfaffianによる解τの表示.

BKP方程式系はBilinear formで

$$[(D_3-D_1^3)D_{-1}+3D_1^2]\tau\cdot\tau=0,$$

$$[D_1^6-5D_1^3D_3-5D_3^2+9D_1D_5]\tau\cdot\tau=0,$$

$$\cdots\cdots$$

と表される。BKP方程式系をreductionすると，次のような非線形波動方程式

(1) Sawada-Kotera equation ($D_3 = 0$)

$$u_t + u_{5x} + 15(u u_{3x} + u_x u_{xx}) + 45 u^2 u_x = 0.$$

(2) Ramani's equation ($D_5 = 0$).

(3) KdV + Sawada-Kotera equation ($D_3 = D_1$)

$$u_t + a(3u^2 + u_{xxx})_x + b(15u^3 + 15 u u_{xx} + u_{4x})_x = 0,$$

(この式は空間一次元における波動の共鳴現象を記述している)。

(4) Model equation for shallow water wave ($D_3 = D_1$)

$$r_t - r_{xxt} - 3 r r_t + 3 r_x \int_x^{\infty} r_t \, dx + r_x = 0.$$

が生成されることが知られている。

KP方程式系の解では M. Sato によって Wronskian で表示され，この表示を使うと Bilinear form は行列式に対する identity (Plücker relation) に等しいことが知られている。これに対応して BKP方程式系の解では pfaffian で表示され，この表示を使うと BKP方程式系の Bilinear form は，pfaffian に対する identity (行列式における Jacobi の等式の一般化) に等しいことを以下に示す。

§ I. 2 Pfaffianの数学

(i) Pfaffianの定義

Pfaffianについてはあまり知られていないので，ここでpfaffianの諸性質について説明する．

n 次の反対称行列 A を考える．A の pfaffian，pf A は det A の平方根として定義される：

$$\det A = [\mathrm{pf}\,A]^2.$$

例．

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix} = [a_{12}]^2, \qquad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = [a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}]^2.$$

pf A を $(1, 2, \cdots, n)$ と表記する．奇数次の pf A は 0 である．

例

$$(1,2,3,4) = (1,2)(3,4) - (1,3)(2,4) + (1,4)(2,3).$$

Pfaffianの最も基本的な展開則は

$(1, 2, \cdots, 2n)$

$$= \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j (1, j)(2, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)$$

である．ここで $\hat{j}$ は j は除外されること示す．また

$$(j, k) = -(k, j)$$

である．逆に pfaffian はこの展開則によって定義される．

例1.

$$(1,2,3,4,5,6)$$

$$= (1,2)(3,4,5,6) - (1,3)(2,4,5,6) + (1,4)(2,3,5,6)$$

$$- (1,5)(2,3,4,6) + (1,6)(2,3,4,5).$$

例2.

$$(1,2,2^*,1^*) = (1,2)(2^*,1^*) - (1,2^*)(2,1^*) + (1,1^*)(2,2^*),$$

ここで

$$(i,j) = (i^*,j^*) = 0$$ と定めると

$$(1,2,2^*,1^*) = \det \begin{vmatrix} (1,1^*) & (1,2^*) \\ (2,1^*) & (2,2^*) \end{vmatrix}$$

である。

一般に

$$(1,2,\cdots,n,n^*\cdots,2^*,1^*) = \det \left| (j,k^*) \right|_{1 \le j,k \le n}$$

である．

関数の微分を表わすpfaffianとして，次の記号を導入する

$$(d_n, j) \equiv \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_j(x), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$(d_n, d_m) \equiv 0, \qquad n, m = 0, 1, 2, \cdots.$$

例. Wronskian

$$\begin{aligned}(d_0, d_1, 2, 1) &= -(d_0, 2)(d_1, 1) + (d_0, 1)(d_1, 2) \\ &= -f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ &= W_r(f_1, f_2).\end{aligned}$$

一般に

$$(d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}, n, \cdots, 2, 1) = W_r(f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

である。

(ii) Pfaffianの展開定理.

$$\begin{aligned}&(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n) \\ &= \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j [(a_1, a_2, 1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n) \\ &\qquad + (1, j)(a_1, a_2, 2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)] \\ &\quad + (a_1, a_2)(1, 2, \cdots, 2n).\end{aligned}$$

「証明」

$$(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)$$

$$= (1, a_1, a_2, 2, \cdots, 2n).$$

これを展開して

$$= (1, a_1)(a_2, 2, \cdots, 2n) - (1, a_2)(a_1, 2, \cdots, 2n)$$

$$+ \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j (1, j)(a_1, a_2, 2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n). \qquad (*)$$

一方

$$\sum_{j=2}^{2n} (-1)^j (a_1, a_2, 1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)$$

$$= \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j [(a_1, a_2)(1, j) - (a_1, 1)(a_2, j) + (a_1, j)(a_2, 1)] (2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots 2n)$$

展開定理を逆に使ってまとめると

$$= (a_1, a_2)(1, 2, \cdots, 2n) - (a_1, 1)(a_2, 2, 3, \cdots, 2n)$$

$$- (1, a_2)(a_1, 2, 3, \cdots, 2n) \qquad (**)$$

(*)式から(**)式を引いて

$$(a_1, a_2, 1, 2, \cdots, 2n)$$

$$= \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j [(a_1, a_2, 1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n) + (1, j)(a_1, a_2, 2, 3, \cdots \hat{j}, \cdots 2n)]$$

$$- (a_1, a_2)(1, 2, \cdots, 2n)$$

を得る（証明終）
この展開定理はpfaffianの微分則の計算に使う。

ここでpfaffianのminor（行列式の小行列式に対応するもの）を導入する.

n次のpfaffian $(1,2,\cdots,n)$から任意のl $(l<n)$個の数字$\{j_1,j_2,\cdots j_l\}$を除いて作った$(n-l)$次のpfaffianをpfaffian $(1,2,\cdots,n)$のminorと呼び，$M(j_1,j_2,\cdots,j_l)$と略記する.

この記号を使うと次の展開定理が成り立つ（証明略）

$$(a_1,a_2,\cdots,a_l,1,2,\cdots,n)$$

$$=\sum_{1\leq j_1<j_2\cdots<j_l\leq n}\cdots\sum(-1)^{P_l}(a_1,a_2,\cdots,a_l,j_1,j_2,\cdots,j_l)M(j_1,j_2,\cdots,j_l)$$

ここで　$P_l=j_1+j_2+\cdots+j_l-\frac{l}{2}(l+1)$,

$(a_j,a_k)=0,\qquad j,k=1,2,\cdots,l,$

$M(j_1,j_2,\cdots,j_l)$はpfaffian $(1,2,\cdots,n)$のminor.

例.　$(d_0,d_1)=0$のとき,

$(d_0,d_1,1,2,3,4)$

$$= (d_0, d_1, 1, 2)(3,4) - (d_0, d_1, 1, 3)(2,4) + (d_0, d_1, 1, 4)(2,3)$$
$$+ (d_0, d_1, 2, 3)(1,4) - (d_0, d_1, 2, 4)(1,3) + (d_0, d_1, 3, 4)(1,2).$$

この展開定理はpfaffianの高次微分の計算で使う。

(iii) Pfaffianの恒等式

Pfaffianには色々な恒等式があるが、その中で最も重要なものは次式である(証明略)

任意の自然数 m, n に対して

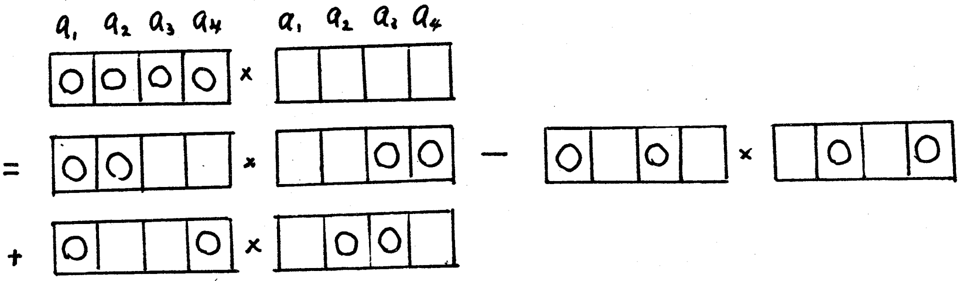
$$(a_1, a_2, \cdots, a_m, 1, 2, \cdots, n)(1, 2, \cdots, n)$$
$$= \sum_{j=2}^{n} (-1)^j (a_1, a_j, 1, 2, \cdots, n)(a_2, a_3, \cdots, \hat{a}_j, \cdots, a_m, 1, 2, \cdots, n)$$

が成立する。

例. $m=4$ のとき

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, 1, 2, \cdots, n)(1, 2, \cdots, n)$$
$$= (a_1, a_2, 1, 2, \cdots, n)(a_3, a_4, 1, 2, \cdots, n) - (a_1, a_3, 1, 2, \cdots, n)(a_2, a_4, 1, \cdots n)$$
$$+ (a_1, a_4, 1, 2, \cdots, n)(a_2, a_3, 1, 2, \cdots, n).$$

この恒等式を M. Sato の Maya diagram にならって、次の図のように表示する:



§I.3 BKP方程式の解

BKP方程式

$$(D_1^6-5D_1^3D_3-5D_3^2+9D_1D_5)\tau\cdot\tau=0$$

を考える.

この方程式の2-soliton解 τ_2 は Date, Jimbo, Kashiwara, Miwa によって

$$\tau_2=1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+\beta_{12}e^{\eta_1+\eta_2},$$

ここで,

$$\eta_i=(p_i+q_i)x_1+(p_i^3+q_i^3)x_3+(p_i^5+q_i^5)x_5+\cdots,\quad i=1,2,$$

$$\beta_{12}=\frac{(p_1-q_1)(p_1-q_2)(p_2-q_1)(p_2-q_2)}{(p_1+q_1)(p_1+q_2)(p_2+q_1)(p_2+q_2)},$$

となることが知られている。

この解はもうすこし一般化できて

$$\tau_2 = \left(a_{11} + \frac{p_1 - q_1}{p_1 + q_1} e^{\xi_1 + \hat{\xi}_1}\right)\left(a_{22} + \frac{p_2 - q_2}{p_2 + q_2} e^{\xi_2 + \hat{\xi}_2}\right)$$
$$- \left(a_{12} + \frac{p_1 - q_2}{p_1 + q_2} e^{\xi_1 + \hat{\xi}_2}\right)\left(a_{21} + \frac{p_2 - q_1}{p_2 + q_1} e^{\xi_2 + \hat{\xi}_1}\right)$$
$$- \left(b_{12} + \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} e^{\xi_1 + \xi_2}\right)\left(b_{21} + \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} e^{\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2}\right),$$

ここで

a_{ij}, b_{ij} は const,

$\xi_i = p_i x_1 + p_i^3 x_3 + p_i^5 x_5 + \cdots$,

$\hat{\xi}_i = q_i x_1 + q_i^3 x_3 + q_i^5 x_5 + \cdots$,

と拡張される。この種の計算には数式処理が非常に役に立つ。この τ_2 は pfaffian の形

$$\tau_2 = (1,2,3,4)$$
$$= (1,2)(3,4) - (1,3)(2,4) + (1,4)(2,3)$$

をしている。

一般に n-soliton 解 τ_n は $2n$ 次の pfaffian で表現出来る：

$$\tau_n = (1, 2, \cdots, 2n)$$

ここで

$$(j, k) = c_{jk} + \int_{-\infty}^{x} D_{x'} f_j(x') \cdot f_k(x')\, dx',$$

ただし

$c_{jk}=-c_{kj}$ は const で，f_j は次の線形偏微分方程式をみたす（$x_1=x$），

$$\frac{\partial}{\partial x_m} f_j(x)=\frac{\partial^m}{\partial x^m} f_j(x), \qquad m \text{ は奇数}.$$

例．$f_j=e^{\xi_j}$，とすると

$$(j,k)=c_{jk}+\frac{p_j-p_k}{p_j+p_k}e^{\xi_j+\xi_k}$$

である．

$\tau_n=(1,2,\cdots,2n)$ を証明するには，pfaffian に対する微分則の表現法が必要になる。

§I. 4　Pfaffian の微分則

Bilinear form の BKP 方程式は

$$(D_1^6-5D_1^3D_3-5D_3^2+9D_1D_5)\tau\cdot\tau=0$$

であるが，これを通常の微分で書き表わすと

$$\left[\left(\frac{\partial^6}{\partial x_1^6}-5\frac{\partial^4}{\partial x_1^3\partial x_3}-5\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+9\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_5}\right)\tau\right]\tau$$

$$+3\left[\left(-2\frac{\partial^5}{\partial x_1^5}+5\frac{\partial^3}{\partial x_1^2\partial x_3}-3\frac{\partial}{\partial x_5}\right)\tau\right]\left[\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\right]$$

$$-15\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}-\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}\right)\tau\right]\left[\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2}\right]$$

$$-5\left[\left(2\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\tau\right]\left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}-\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\tau\right]=0$$

になる。pfaffian の微分則を調べる.

Pfaffian の要素 (j,k) が

$$(j,k)=c_{jk}+\int_{-\infty}^{x} D_{x'} f_j(x')\cdot f_k(x')\,dx'$$

で与えられるとき，まず 要素 (j,k) の微分則を調べる。

ここで

$$\frac{\partial}{\partial x_n} f_j(x)=\frac{\partial^n}{\partial x^n} f_j(x) \qquad \text{for odd } n.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(j,k)=D_x f_j(x)\cdot f_k(x)$$

$$\equiv \frac{\partial f_j}{\partial x} f_k - f_j \frac{\partial f_k}{\partial x},$$

§I.2で導入した記号

$$(d_n,j)=\frac{\partial^n}{\partial x^n} f_j(x),$$

$$(d_n,d_m)=0,$$

を使うと，(j,k) の x-微分は pfaffian で表現され

$$\frac{\partial}{\partial x}(j, k) = (d_0, d_1, j, k)$$

となる。$2n$ 次の pfaffian の x-微分は，展開定理を使うと

$$\frac{\partial}{\partial x}(1, 2, \cdots, 2n)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j (1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j [(d_0, d_1, 1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n) + (1, j)(d_0, d_1, 2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)]$$

(ここで，数学的帰納法を使った)

$$= (d_0, d_1, 1, 2, \cdots, 2n)$$

となる。同じような計算を続けて，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1, 2, \cdots, 2n) = (d_0, d_2, 1, 2, \cdots, 2n),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}(1, 2, \cdots, 2n) = (d_1, d_2, 1, 2, \cdots, 2n) + (d_0, d_3, 1, 2, \cdots, 2n),$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}(1, 2, \cdots, 2n) = 2(d_1, d_3, 1, 2, \cdots, 2n) + (d_0, d_4, 1, 2, \cdots, 2n),$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x^5}(1, 2, \cdots, 2n) = 2(d_2, d_3, 1, 2, \cdots, 2n) + 3(d_1, d_4, 1, 2, \cdots, 2n) + (d_0, d_5, 1, 2, \cdots, 2n),$$

$$\frac{\partial^6}{\partial x^6}(1,2,\cdots,2n)=5(d_2,d_4,1,2,\cdots,2n)+4(d_1,d_5,1,2,\cdots,2n)$$
$$+(d_0,d_6,1,2,\cdots,2n)+2(d_0,d_1,d_2,d_3,1,2,\cdots,2n),$$

を得る。

次に (j,k) 要素の x_3-微分を計算する。

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(j,k)=\int_{-\infty}^{x} D_x\left(\frac{\partial^3 f_j}{\partial x^3}\cdot f_k+f_j\cdot\frac{\partial^3 f_k}{\partial x^3}\right)dx.$$

右辺は部分積分をくり返すと

$$=\left(\frac{\partial^3 f_j}{\partial x^3}\right)f_k-f_j\left(\frac{\partial^3 f_k}{\partial x^3}\right)-2\left[\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial f_j}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}\right)\right]$$

となるが，この式も pfaffian で表現される：

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(j,k)=(d_0,d_3,j,k)-2(d_1,d_2,j,k).$$

これより $2n$ 次の pfaffian の x_3-微分は

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(1,\cdots,2n)=(d_0,d_3,1,\cdots,2n)-2(d_1,d_2,1,\cdots,2n)$$

となる．同様にして

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial x_3}(1,\cdots,2n)=-(d_1,d_3,1,\cdots,2n)+(d_0,d_4,1,\cdots,2n),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial x_3}(1,\cdots,2n)=-(d_2,d_4,1,\cdots,2n)+(d_0,d_5,1,\cdots,2n),$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial x_3}(1,\cdots,2n) = -(d_2, d_4, 1,\cdots,2n) + (d_1, d_5, 1,\cdots,2n)$$
$$+(d_0, d_6, 1,\cdots,2n) - (d_0, d_1, d_2, d_3, 1,\cdots,2n),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(1,\cdots,2n) = 2(d_2, d_4, 1,\cdots 2n) - 2(d_1, d_5, 1,\cdots,2n)$$
$$+(d_0, d_6, 1,\cdots,2n) - 4(d_0, d_1, d_2, d_3, 1,\cdots,2n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_5}(1,\cdots,2n) = (d_0, d_5, 1,\cdots,2n) - 2(d_1, d_4, 1,\cdots,2n)$$
$$+2(d_2, d_3, 1,\cdots,2n),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_5}(1,\cdots,2n) = -(d_1, d_5, 1,\cdots,2n) + (d_0, d_6, 1,\cdots,2n)$$
$$+2(d_0, d_1, d_2, d_3, 1,\cdots,2n),$$

を得る。

これらの結果をBKP方程式に代入すると

$$(d_0, d_1, d_2, d_3, 1,\cdots,2n)(1,\cdots,2n)$$
$$-(d_0, d_1, 1,\cdots,2n)(d_2, d_3, 1,\cdots,2n)$$
$$+(d_0, d_2, 1,\cdots,2n)(d_1, d_3, 1,\cdots,2n)$$
$$-(d_0, d_3, 1,\cdots,2n)(d_1, d_2, 1,\cdots,2n) = 0$$

となる。この式はpfaffianのidentityである。

結論としてBKP方程式の解はpfaffianで表現され，その時Bilinear formはpfaffianのidentityに等しい。

§II.1 Dressing methodによるKP方程式系の構成

Zakharov and Shabatによる"dresing method"はSoliton方程式を研究する有力な一方法である. はじめにこの方法の復習をする。

線形の積分演算子$\hat{F}$を定義する:

$$\hat{F}\circ\psi=\int_{-\infty}^{\infty}F(x,y)\psi(y)dy.$$

この演算子$\hat{F}$の"Volterra decomposition"

$$1+\hat{F}=(1+K)^{-1}(1+\tilde{K})$$

を考える. ここで

$$K(x,z)=0,\qquad \text{for}\quad z>x,$$

$$\tilde{K}(x,z)=0,\qquad \text{for}\quad z<x$$

である。この式に$1+K$を左から作用させると次のGelfand-Levitan equationが得られる。

$$K(x,z)+F(x,z)+\int_{-\infty}^{x}K(x,y)F(y,z)dy=0,\qquad z<x.$$

次に "bare" operator M_n と "bare" wave function f を定義する。M_n は線形偏微分演算子 例えば

$$M_n = \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n},$$

であり，f はその解である：

$$M_n f = 0.$$

"dressed" operator $\tilde{A}_n$ と "dressed" wave function ψ は Volterra operator $1+K$ を使って "bare" の M_n と f から構成される：

$$\tilde{A}_n = (1+K) M_n (1+K)^{-1}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n} - \sum_{j=1}^{n-1} u_j \frac{\partial^{n-1-j}}{\partial x^{n-1-j}},$$

$$\psi = (1+K)\circ f.$$

この構成法によって $\tilde{A}_n \psi = 0$ である。この $\tilde{A}_n$ が Lax-pair を与える。
$\tilde{A}_n(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ は上の定義から得られる次の積分方程式

$$\tilde{A}_n (1+K)\circ f - (1+K)\circ M_n f = 0$$

によって決定される。

交換関係

$$[\tilde{A}_n, \tilde{A}_m] = 0 \qquad \text{for} \quad n, m \geqq 1$$

はKP方程式系を与える。

§II.2 BKP方程式の Lax-pair

BKP方程式

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5)\tau \cdot \tau = 0$$

の Lax-pair は上式の Bäcklund transformation

$$\begin{cases} (D_1^3 - D_3)\tau' \cdot \tau = 0 \\ (D_1^5 + 5D_3 D_1^2 - 6D_5)\tau' \cdot \tau = 0 \end{cases}$$

から求められる:

$$\tau' = \psi\tau, \quad w = \frac{\partial}{\partial x}\log\tau$$

とおくと, Bäcklund transformation は次の Lax-pair になる.

$$\begin{cases} \tilde{B}_3 \psi = 0, \\ \tilde{B}_5 \psi = 0. \end{cases}$$

ここで

$$\tilde{B}_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6 w_x \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\tilde{B}_5 = \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{\partial^5}{\partial x^5} - 10 w_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 10 w_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{10}{3}\left(2 w_{xxx} + 6 w_x^2 + \frac{\partial w}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x}.$$

この Lax-pair $\tilde{B}_3$, $\tilde{B}_5$ は当然のことだが，KP方程式系の Lax-pair $\tilde{A}_3$, $\tilde{A}_5$ とは異る。微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ を含まない項が 0 になっている。しかし $\tilde{B}_3$, $\tilde{B}_5$ の "bare" operator は $\tilde{A}_3$, $\tilde{A}_5$ を与えるものと同じく M_3, M_5 であると推定される。

同じ "bare" operator から出発して，異った "dressing" operator $\tilde{B}_3$, $\tilde{B}_5$ を構成するためには，"dressing method" の修正が必要である。ここでは積分演算子

$$\hat{F} \circ \psi = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\, \psi(y)\, dy$$

を修正する。

§II.3 Dressing method による BKP 方程式系の構成

次のような新しい線形積分演算子 $\tilde{F}$ を導入する。

$$\tilde{F} \circ \psi = -\int_{-\infty}^{\infty} D_y F(x, y) \cdot \psi(y)\, dy$$

$$\equiv -\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\psi(y) - F(x,y)\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\right]dy.$$

この積分演算子に対する存在条件等については現在のところ何も分っていない。以下では形式的議論を展開し，計算は具体例についてのみ行う。

この演算子の形式的な "Volterra decomposition" によって，次の新しい積分方程式を得る：

$$K(x,z) + F(x,z) - \int_{-\infty}^{x} D_y K(x,y)\cdot F(y,z)\,dy = 0, \quad \text{for } z<x.$$

ここで，$F(x,z)$ に対して新しい条件

$$F(x,z) = -F(z,x),$$

$$F(x,-\infty) = 0$$

を課す．このとき $K(x,z)$ を F で表わした形式解は

$$K(x,x) = 0$$

を満足する。（証明略）．

BKP方程式系を構成するために，次の "bare" operator M_n と "bare" wave function f_p から出発する。

$$M_n = \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n},$$

$$M_n f_p = 0, \qquad \text{for odd } n.$$

"dressed" operator $\tilde{B}_n$

$$\tilde{B}_n = \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n} - \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{u}_j \frac{\partial^{n-1-j}}{\partial x^{n-1-j}}$$

を新しい積分方程式

$$\tilde{B}_n (1+K) \circ f_p - (1+K) \circ M_n f_p = 0$$

or

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n} - \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{u}_j \frac{\partial^{n-1-j}}{\partial x^{n-1-j}}\right)\left[f_p - \int_{-\infty}^{x} D_y K(x,y) \cdot f_p(y) dy \right]$$

$$- \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right) f_p - \int_{-\infty}^{x} D_y K(x,y) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial y^n}\right) f_p(y) dy \right\} = 0$$

によって決定する。

この積分方程式より，$n=3$ の場合，次の関係式が得られる.

$$\tilde{u}_1 = 0, \qquad \tilde{u}_2 = 6 \frac{d}{dx} K_y(x,x),$$

$$\tilde{u}_3 = \tilde{u}_2 K_y(x,x) + 3 \frac{d}{dx} K_{xy}(x,x),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \tilde{u}_2 \frac{\partial}{\partial x} - \tilde{u}_3 \right] K(x,y) = 0,$$

ただし

$$K_{\underbrace{xx\cdots x}_{m}\underbrace{yy\cdots y}_{n}}(x,x) \equiv \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} K(x,y)\Big|_{y=x}$$

である。

ここで $\widetilde{B}_3$ がBKP方程式の Lax-pair であるための条件

$$\widetilde{u}_3 = 0$$

を使うと、$K_{xy}(x,x)$ と $K_y(x,x)$ は次の関係式

$$\frac{d}{dx} K_y^2(x,x) + K_{xy}(x,x) = 0$$

で結ばれていることが分る。(ただし積分定数は0にとった)

ここで従属変数 w を

$$w = K_y(x,x)$$

で導入すると、

$$\widetilde{B}_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6 w_x \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial y^3} - 6 w_x \frac{\partial}{\partial x}\right] K(x,y) = 0.$$

となり、この $\widetilde{B}_3$ は前章で得られた結果と一致している。

次に，$n=5$ の場合，$\widetilde{B}_5$ を

$$\widetilde{B}_5=\frac{\partial}{\partial x_5}-\frac{\partial^5}{\partial x^5}+u_1\frac{\partial^3}{\partial x^3}+u_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u_3\frac{\partial}{\partial x}+u_4$$

とおき，積分方程式

$$\widetilde{B}_5(1+K)\circ f_p-(1+K)\circ M_5 f_p=0$$

に代入すると，（面倒な計算の結果）

$$u_1=-10\frac{d}{dx}K_y,$$

$$u_2=2u_1K_y-10(2K_{xxy}+3K_{xyy}+K_{yyy}),$$

$$u_3=u_1(6K_{xy}+4K_{yy})+2u_2K_y$$
$$-10(2K_{xxxy}+4K_{xxyy}+3K_{xyyy}+K_{yyyy}),$$

$$u_4=u_1(3K_{xxy}+3K_{xyy}+K_{yyy})+u_2(2K_{xy}+K_{yy})+u_3K_y$$
$$-5(K_{xxxxy}+2K_{xxxyy}+2K_{xxyyy}+K_{xyyyy}),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_5}-\frac{\partial^5}{\partial x^5}-\frac{\partial^5}{\partial y^5}+u_1\frac{\partial^3}{\partial x^3}+u_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u_3\frac{\partial}{\partial x}+u_4\right]K(x,y)=0,$$

が得られる。

ここで $K_y(x,x)=w$，$\frac{d^n}{dx^n}K(x,x)=0$，$n=0,1,2,\cdots$ を用いると，

$$u_1=-10w_x,\quad u_2=-10w_{xx},$$

$$u_3 = -\frac{10}{3}\left(2w_{xxx} + 6w_x^2 + \frac{\partial w}{\partial x_3}\right), \qquad u_4 = 0,$$

となる。 結局

$$\tilde{B}_5 = \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{\partial^5}{\partial x^5} - 10\, w_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 10\, w_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$
$$- \frac{10}{3}\left(2w_{xxx} + 6w_x^2 + \frac{\partial w}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x},$$

となり, 前章の結果が得られる.

結論として Zakhrov & Shabat の "dressing method" によって BKP 方程式系は構成出来る。ただし Gel'fand-Levitan integral equation の代りに, 次の積分方程式

$$K(x,z) + F(x,z) - \int_{-\infty}^{x} D_y K(x,y) \cdot F(y,z)\, dy = 0,$$

ここで

$$F(x,z) = -F(z,x), \quad F(x,-\infty) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} K(x,z)\Big|_{z=x} = \frac{\partial}{\partial x} \log \tau$$

を使う必要がある。

§II. 4 積分方程式の特解

前章で導入した積分方程式

$$K(x,z) + F(x,z) - \int_{-\infty}^{x} D_y K(x,y) \cdot F(y,z)\, dy = 0$$

$$F(x,y) = -F(y,x)$$

の特解は Gelfand-Levitan 方程式と全く同じようにして求められる。

前章で $K(x,y)$ は次の微分方程式

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial y^3} - 6 w_x \frac{\partial}{\partial x}\right] K(x,y) = 0 \quad , \quad w = K_y(x,x).$$

を満たすこと示したが、以下で $F(x,y)$ は上式で $w_x = 0$ とおいた式

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial y^3}\right] F(x,y) = 0$$

の解であると仮定する。 この方程式の解で条件 $F(x,y) = -F(y,x)$ をみたすものとして以下の形を考える

$$F(x,y) = -\sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} f_j(x) (C^{-1})_{jk} f_k(y)$$

ここで、C は $2n$ 次の反対称行列で C の jk 成分は c_{jk} である。 $f_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,2n)$ を "bare" wave function:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}-\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right)f_j(x)=0, \quad \text{for odd } n,$$

境界条件: $f_j(-\infty)=0$, とする.

$K(x,y)$として

$$K(x,y)=\sum_{j=1}^{2n}\xi_j(x)f_j(y)$$

の形の解を仮定する. 次に $2n\times 2n$ の行列 EとAを導入する:

$$(E)_{jk}=\delta_{jk} \quad : 単位行列$$

$$(A)_{jk}=\int_{-\infty}^{x}D_y f_j(y)\cdot f_k(y)\,dy; \quad 反対称行列.$$

更に$2n$次の列ベクトル $\underset{\sim}{f}(x)$ と $\underset{\sim}{\xi}(x)$ を導入する:

$$\underset{\sim}{f}(x)=\begin{bmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots \\ f_{2n}(x)\end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\xi}(x)=\begin{bmatrix} \xi_1(x)\\ \xi_2(x)\\ \vdots \\ \xi_{2n}(x)\end{bmatrix}.$$

これらの記号によって (Tは転置行列を示す)

$$F(x,y)=-\underset{\sim}{f}^T(x)\,C^{-1}\underset{\sim}{f}(y),$$

$$K(x,y) = \boldsymbol{\xi}^T(x)\, E\, \boldsymbol{f}(y),$$

$$-\int_{-\infty}^{x} D_{x'} K(x,x') \cdot F(x',y)\, dx' = \boldsymbol{\xi}^T(x)\, A\, C^{-1} \boldsymbol{f}(y).$$

と表現され，積分方程式は

$$\boldsymbol{\xi}^T(x)\, E\, \boldsymbol{f}(y) - \boldsymbol{f}^T(x)\, C^{-1} \boldsymbol{f}(y) + \boldsymbol{\xi}^T(x)\, A\, C^{-1} \boldsymbol{f}(y) = 0$$

または

$$\left\{ \boldsymbol{\xi}^T(x) [C + A] - \boldsymbol{f}^T(x) \right\} C^{-1} \boldsymbol{f}(y) = 0$$

と表わされる。　これを代数的に解いて

$$\boldsymbol{\xi}^T(x) = \boldsymbol{f}^T(x) [C + A]^{-1}$$

を得る。したがって

$$K(x,y) = \boldsymbol{f}^T(x) [C + A]^{-1} \boldsymbol{f}(y)$$

である。

反対称行列の逆行列はpfaffianで表現される：

$$([C+A]^{-1})_{j,k} = (-1)^{k+j-1} M(k,j)/\tau_n .$$

ここで $M(k,j)$ は pfaffian $\tau_n = (1,2,\cdot\cdot,2n)$ の minor である。τ_n は第Ⅱ章で求めた BKP 方程式の n-soliton 解を表わす pfaffian で、その (j,k) 要素は

$$(j,k) = c_{jk} + \int_{-\infty}^{x} D_y f_j(y)\cdot f_k(y)\,dy$$

で与えられる。

$K(x,y)$ を pfaffian で表現するために、次の記号

$$(c_0, j) = f_j(y), \qquad (d_0, j) = f_j(x),$$

を導入する。この記号を使うと

$$K(x,y) = \frac{(d_0, c_0, 1, 2, \cdot\cdot, 2n)}{(1, 2, \cdot\cdot, 2n)}$$

である。この式より、前に求めた関係式

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}K(x,y)\right|_{y=x} = \frac{(d_0, d_1, 1, 2, \cdot\cdot, 2n)}{(1, 2, \cdot\cdot, 2n)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\log\tau_n$$

が確かめられる。

結論として，BKP方程式系に対する積分方程式は

$$K(x,y)+F(x,y)-\int_{-\infty}^{x} D_{x'}K(x,x')\cdot F(x',y)\,dx'=0,$$

ここで

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}-\frac{\partial^n}{\partial x^n}-\frac{\partial^n}{\partial y^n}\right)F(x,y)=0,$$

$$F(x,y)=-F(y,x),\quad F(x,-\infty)=0,$$

であり．BKP方程式系の解 τ は積分方程式の解 $K(x,y)$ より

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}K(x,y)\right|_{y=x}=\frac{\partial}{\partial x}\log\tau$$

によって求められる。